Université Khasdi Merbah 2024-2025 Département de Mathématiques

# TD3 : Séries entières⋆⋆⋆ Séries de Fourier

**Exercice 1 :**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ suivantes :
$a_n = \ln n, \quad a_n = (\ln n)^n, \quad a_n = (\sqrt{n})^n, \quad a_n = e^{n^{\frac{1}{3}}}, \quad a_n = \arcsin\left(\frac{n+1}{1+n\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}.$

**Exercice 2 :**

Déterminer suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a^n}{1+b^n} x^n.$$

**Exercice 3 :**

1. Déterminer le rayon de convergence $R$ des séries entières réelles $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ suivantes et calculer leurs sommes sur $]-R, R[$:

$$a_n = n, \quad a_n = n(n-1), \quad a_n = n^2.$$

2. Déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{2^n}.$$

**Exercice 4 :**

Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \quad g(x) = \ln(x^2-5x+6), \quad h(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt.$$

**Exercice 5 :**

Déterminer le rayon de convergence $R$ et calculer pour tout $x \in [-R, R]$, la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

**Exercice 6 :**

Déterminer le rayon de convergence $R$ et calculer pour tout $x \in [-R, R]$, la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1}.$$

**Exercice 7 :**

Déterminer le rayon de convergence $R$ et calculer pour tout $x \in [-R, R]$, la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$$

**Exercice 8 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ où $\alpha$ est un réel non entier naturel.

1. Vérifier que $f$ est une solution de l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0, \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Retrouver le développement en série entière de $f$ ainsi que son rayon de convergence.

**Exercice 9 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique, impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{si} \quad x \in ]0, \pi[ \\ \\ 0 = \text{si} \quad x = \pi. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de $f$.
3. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

**Exercice 10 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique, telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in ]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de $f$.
3. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

**Exercice 11 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = (x-\pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de $f$.
3. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$