Université Khasdi Merbah — 2024-2025 — Département de Mathématiques

TD2 :Suites et séries de fonctions

Exercice 1 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$
2. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f_n(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2},\ \forall n \in \mathbb{N}.$
3. $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2},\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Exercice 2 :

On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions (f_n) par

$$f_n(x) = n^2x^n(1-x^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$.
2. Comparer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)dx$. Que peut-on conclure ?
3. Y-a-il une partie de $[0,1]$ sur laquelle il y'a convergence uniforme ?

Exercice 3 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f_n(x) = (-1)^n\frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

Exercice 4 :

Soient $a > 0$, $n \geq 0$ et $x \geq 0$. On pose $f_n(x) = x^a e^{-nx}$.

1. Calculer la somme de la série de terme général $f_n(x)$.
2. Montrer que l'on a convergence normale si $a > 1$.
3. Montrer que l'on n'a pas convergence uniforme si $a \leq 1$.
4. Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle $[s,+\infty[$, où $s > 0$.

Exercice 5 :

Montrer que la série de terme général défini par $u_0(x) = 0$ et

$$u_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2} \quad \text{pour } n \geq 1$$

est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la série de terme général $u'_n(x)$?

Exercice 6 :

Soient α, a, b des nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $0 < a < b$. Montrer que la série de terme général défini par $u_0 = 0$ et

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \quad \text{si } n \geq 1$$

est uniformément convergente sur le segment $[a, b]$.

Exercice 7 :

Pour tout réel x on pose : $u_n(x) = -2n^2 x e^{-n^2x^2}$.

1. Montrer que la série de terme général $v_n(x) = u_n(x) - u_{n+1}(x)$. converge et calculer la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$.

2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme général

$$w_n = \int_0^a v_n(t)dt$$

converge et calculer sa somme.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^a S(t)dt$.

4. En déduire que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$.