التمرين الأول

1- أثبت أنه لكل عدد طبيعي n لدينا: $|\sin nx| \leq n|\sin x|$.

2- أثبت متباينة كوشي شوارتز. إذا كان $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

3- متتالية فيبوناتشي معرفة كما يلي:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \forall n \geq 1 : F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

أثبت أنه لكل عدد طبيعي $n \geq 11$ لدينا: $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

4- أثبت أن كل عدد طبيعي $n \geq 2$ إما أن يكون أوليا أو جداء لأعداد أولية.

التمرين الثاني

في نظام هلبرت أكرمان

1- أثبت أن $\vdash \overline{x} \vee x$.

2- أثبت أن $\vdash x \vee \overline{x}$.

3- اعتمادا على 1) أثبت أن $\vdash x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$.

4- اعتمادا على 2) أثبت أن $\vdash \overline{\overline{x}} \Rightarrow x$.

التمرين الثالث

في نظام هلبرت أكرمان

1- أثبت أن

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash A \Rightarrow B \\ \vdash C \Rightarrow D\end{array}}{\vdash A \vee C \Rightarrow B \vee D}$$

التمرين الرابع

في نظام هلبرت أكرمان

1- أثبت العكس النقيض $\vdash (x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$.

2- أثبت أن $\vdash x \Rightarrow x \wedge x$.

3- أثبت أن $\vdash x \wedge y \Rightarrow y \wedge x$.