في كل ما يلي الحروف اللاتينية صغيرها وكبيرها يعبر عن قضايا أولية أو مركبة.

التمرين الأول

تحقق ما إذا كانت القضايا التالية بيّنة، متناقضة أو قابلة للتحقق:

1) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow q$
2) $(\overline{p} \vee q) \wedge ((p \wedge r) \wedge (\overline{q} \vee \overline{r}))$
3) $p \wedge (q \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\overline{p \wedge r})$
4) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r)$
5) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r))$
6) $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p \wedge \overline{q})) \Rightarrow \overline{p}$

التمرين الثاني

دون الاعتماد على جدول الحقيقة أثبت أن القضيتين التاليتين بيّنتين:

1- $p \Rightarrow p$.

2- $(p \wedge q) \vee \overline{p} \Rightarrow q \equiv p \vee q$.

التمرين الثالث

أثبت من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ صحة التكافؤ التالي

$$p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow p_n))) \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{n-1} \Rightarrow p_n).$$

التمرين الرابع

إليك العبارات المنطقية التالية:

A : إذا كان الطالب مجتهدا فإنه يحضر كل المحاضرات أو يكون النجاح حليفه.

B : إذا لم يحضر الطالب كل المحاضرات فإنه يندم.

C : إذا ندم الطالب وكان مجتهدا فإنه لا ينجح.

D : الطالب يحضر كل المحاضرات.

السؤال: هل العبارة D نتيجة منطقية للعبارات A، B و C.

التمرين الخامس

لتكن G القضية المعرفة كما يلي: $G \equiv (A \wedge B \Rightarrow C)$ حيث

$$\begin{cases} A \equiv p \Rightarrow q, \\ B \equiv r \downarrow q, \\ C \equiv p \between r, \end{cases}$$

حيث $\between$ رابط ثنائي كيفي و $a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$.

1- أثبت أنه مهما كان الرابط $\between$ فإن G يستحيل أن تكون متناقضة.

2- نعرف ϕ_C تابع صحة القضية C كما يلي:

$$\begin{aligned} \phi_C :\ & E^2 \to E \\ & (1,1) \mapsto \varepsilon_1 \\ & (1,0) \mapsto \varepsilon_2 \\ & (0,1) \mapsto \varepsilon_3 \\ & (0,0) \mapsto \varepsilon_4 \end{aligned}$$

عيّن قيم ε_1، ε_2، ε_3 و ε_4 حتى تكون G بيّنة.

التمرين السادس

لتكن القضية $G \equiv (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n)$.

1- ما هي التفسيرات التي تجعل G صادقة؟

2- حدد الشكل النموذجي الانفصالي للقضية $F \equiv G \wedge (A_n \Rightarrow A_1)$.

التمرين السابع

لتكن G القضية المعرفة كما يلي: $G \equiv \left[a \circ (b \wedge c)\right] \Leftrightarrow \left[(a \circ b) \vee (a \circ c)\right]$ حيث $\circ$ رابط ثنائي كيفي معّرف بتابع صحته:

$$\begin{aligned} \phi_\circ : \quad E^2 &\to E \\ (1,1) &\mapsto \varepsilon_1 \\ (1,0) &\mapsto \varepsilon_2 \\ (0,1) &\mapsto \varepsilon_3 \\ (0,0) &\mapsto \varepsilon_4 \end{aligned}$$

1- عيّن كل قيم الرباعية $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$، إن أمكن، في الحالتين: أ) حتى تكون G متناقضة. ب) حتى تكون G بيّنة.

2- نضع الآن $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1, 0, 1, 0)$. عيّن الشكل النموذجي الانفصالي للقضية G.

التمرين الثامن - خصائص المكممين

أثبت الخصائص التالية:

1- $\forall x\ p(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x\ \overline{p}(x))$.

2- $\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists x\ p(x)$.

3- خاصية التبديل:

$$\exists x\ \exists y\ R(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ R(x,y).$$
$$\forall x\ \forall y\ R(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ R(x,y).$$

4- توزيع المكمم الكلي على الوصل:

$$\forall x\ (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x).$$

5- توزيع المكمم الوجودي على الفصل:

$$\exists x\ (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x).$$

6-

$$\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x)).$$

7-

$$\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow [\forall x\ p(x) \Rightarrow \forall x\ q(x)].$$

8-

$$\forall x\ (p(x) \Leftrightarrow q(x)) \Rightarrow [\forall x\ p(x) \Leftrightarrow \forall x\ q(x)].$$