جامعة قاصدي مرباح –ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة — **السنة الجامعية: 2024 /2025**

قسم الرياضيات — **السداسي: الخامس**

السنة الثالثة رياضيات — **مقياس: القياس والمكاملة**

حل الامتحان النهائي

تمرين 1: التنقيط: $(2+3+3=8$ *نقط*$)$

1. الأسرة $P(\mathrm{N})$ عشيرة على N، ذلك لأن:

$$\forall A\in P(\mathrm{N})\to(\mathrm{N}\setminus A)\in P(\mathrm{N})$$
$$\{\forall A_n\in P(\mathrm{N}),n\geq 1\}\to\bigcup_{n\geq 1}A_n\in P(\mathrm{N})$$

2. من صيغة الدالة μ_c واضح أنها دالة ليست سالبة على Ω.

بما أن المجموعة الخالية منتهية، فإن:

$$\mu_c(\phi)=card\ \phi=0$$

من ناحية ثانية من أجل كل A و B من $P(\mathrm{N})$، حيث $A\bigcap B=\phi$:

✓ إذا كان $A\coprod B$ منتهيا، أي كل من A و B منتهية، يكون:

$$\mu_c\left(A\coprod B\right)=card\left(A\coprod B\right)=card\ A+card\ B=\mu_c(A)+\mu_c(A)$$

✓ إذا كان $A\coprod B$ غير منته، أي واحدة على الأقل من A أو B غير منتهية، يكون:

$$\mu_c\left(A\coprod B\right)=+\infty$$

$$\mu_c(A)+\mu_c(B)=\begin{cases}card\ A+(+\infty)=+\infty\ ,\\ (+\infty)+card\ B=+\infty\ ,\\ (+\infty)+(+\infty)=+\infty\ \ ,\end{cases}$$

ومنه في كل الحالات يكون:

$$\mu_c\left(A\coprod B\right)=\mu_c(A)+\mu_c(A)$$

وبالتالي تكون μ_c قياسا موجبا على $P(\mathrm{N})$. $($1 *نقطة*$)$.

- نبرهن أن القياس μ_c، $\sigma-$جمعي على $P(\mathrm{N})$، أي أن:

$$\{\forall A_n\in P(\mathrm{N}),n\geq 1\}\to\mu_c\left(\coprod_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_c(A_n)$$

عندنا:

$$\mu_c\left(\coprod_{n\geq 1} A_n\right)=\begin{cases} card \coprod_{n\geq 1} A_n \ , & \coprod_{n\geq 1} A_n \text{ منتهية} \\ +\infty \ , & \coprod_{n\geq 1} A_n \text{ غيرمنتهية} \end{cases}$$

✓ في حالة $\coprod_{n\geq 1} A_n$ منته، أي كل من $n\geq 1, A_n$ منتهية ويوجد عدد منته فقط من A_n غير خال، ليكن هو $1\leq j\leq k, A_{n_j}$ عندها يكون:

$$\mu_c\left(\coprod_{n\geq 1} A_n\right)=card\coprod_{n\geq 1} A_n=card\left(\coprod_{1\leq j\leq k} A_{n_j}\coprod\phi\right)=$$

$$=card\left(\coprod_{1\leq j\leq k} A_{n_j}\right)=\sum_{1\leq j\leq k} card\, A_{n_j}=$$

$$=\sum_{1\leq j\leq k} card\, A_{n_j}+\sum_{\substack{n\geq 1, n\neq n_j\\ 1\leq j\leq k}} card\, A_n=\sum_{n\geq 1} card\, A_n=\sum_{n\geq 1}\mu_c(A_n)$$

✓ في حالة $\coprod_{n\geq 1} A_n$ غير منته، أي أن $\mu\left(\coprod_{n\geq 1} A_n\right)=+\infty$:

- إما يوجد على الأقل دليل n_0 من أجله تكون A_{n_0} غير منتهية، عندها يكون:

$$\sum_{n\geq 1}\mu_c(A_n)=\mu_c\left(A_{n_0}\right)+\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq n_0}}\mu_c(A_n)=(+\infty)+\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq n_0}}\mu_c(A_n)=+\infty$$

- وإما يوجد عدد غير منته من A_n تكون مجموعات منتهية، ليكن هو $1\leq j\leq k, A_{n_j}$ وبالتالي يكون:

$$\sum_{n\geq 1}\mu_c(A_n)\geq\sum_{1\leq j\leq k}\mu_c\left(A_{n_j}\right)\geq\sum_{1\leq j\leq k} 1=+\infty$$

هذا يعني أن $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)=+\infty$.

ومنه في كل الحالات يكون:

$$\{\forall A_n\in P(\mathrm{N}), n\geq 1\}\rightarrow\mu_c\left(\coprod_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_c(A_n) \qquad (\text{نقطة } 1)$$

- القياس μ_c، $\sigma-$منته على $P(\mathrm{N})$، ذلك لأن المجموعة N قابلة للعد، ومنه تكتب من الشكل:

$$\mathrm{N}=\bigcup_{n\geq 1} A_n / A_n=\{n\}\ ,\ \mu_c(A_n)<+\infty,\ n\geq 1 \qquad (\text{نقطة } 1)$$

3. معلوم أن التقارب النقطي يستلزم التقارب تقريبا في كل مكان. (1 نقطة)

في الفراغ $(\mathrm{N}, P(\mathrm{N}), \mu_c)$ لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة تقريبا في كل مكان نحو دالة f ، هذا وباعتبار الفراغ تاما يكون:

$$\mu_c\left(\left\{x\in\mathrm{N}/\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\neq f(x)\right\}\right)=0$$

ومنه وباعتبار تعريف القياس μ_c نستنتج أن:

$$\left\{x\in\mathrm{N}/\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\neq f(x)\right\}=\phi$$

ومنه يكون:

$$\forall x\in\mathrm{N}\rightarrow\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$$

هذا يعني أن المتتالية $(f_n)_{n\geq1}$ متقاربة نقطيا نحو الدالة f. (2 نقط)

تمرين 2: التنقيط: $(2+3+3=8$ نقط$)$

الحل:

1. لاحظ أنه من أجل كل x من $[1,+\infty[$ يكون:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2}\chi_{[n,n+1[}(x)=\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}\chi_{[n,n+1[}(x)=\frac{1}{[x]^2}$$

هذا يعني أنه من أجل كل x من المجال $[1,+\infty[$ يكون:

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)\quad/\quad f(x)=\frac{1}{[x]^2}\ ,\ x\in[1,+\infty[\qquad (2\ \text{نقط})$$

2. من شكل المتتالية $(f_n)_{n\geq1}$ واضح أنها دالة بسيطة ومنه وباعتبار $[k,k+1[$ $k=0,1,...,n,$ قابلة للقياس، فإن $(f_n)_{n\geq1}$ تكون قابلة للقياس ومحدودة على المجال $[1,+\infty[$، هذا وباعتبار الدالة f نهاية نقطية للمتتالية $(f_n)_{n\geq1}$ فإنها تكون قابلة للقياس أيضا وهي واضح أنها محدودة على المجال $[1,+\infty[$، ومنه نستنتج أن كلا من المتتالية $(f_n)_{n\geq1}$ والدالة f قابلة للتكامل على $[1,+\infty[$. (3 نقط)

3. المتتالية $(f_n)_{n\geq1}$ ليست سالبة، ليست متناقصة وقابلة للقياس و الدالة f تمثل نهاية لها تقريبا في كل مكان (لأن f نهاية نقطية للمتتالية $(f_n)_{n\geq1}$) ومنه حسب نظرية " ليفي"، (التقارب الرتيب)، يكون:

$$\int_{[1,+\infty[}\frac{1}{[x]^2}d\mu_1=\int_{[1,+\infty[}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)d\mu_1=\lim_{n\to+\infty}\int_{[1,+\infty[}f_n(x)d\mu_1=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{[1,+\infty[}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\chi_{[k,k+1[}(x)d\mu_1=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad (3\ \text{نقط})$$

تمرين3: التنقيط: (4 نقط)

التطبيق h_1 ليس نظيما على الفراغ $£_1(X,\mu)$، ذلك لأن الشرط الأول للنظيم غير محقق، لاحظ أن:

$$h_p(f)=0\Rightarrow\int_X|f(x)|d\mu=0\Rightarrow\left\{f(x)=0\ ,\ x\overset{p.p}{\in}X\right\}$$

ومنه الدالة f ليست معدومة على كل X، أي أن $f\neq0$.

جامعة قاصدي مرباح –ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة
قسم الرياضيات
السنة الثالثة رياضيات

السنة الجامعية: **2024 /2025**
مقياس: القياس والمكاملة
الزمن: **1** سا و **30** د

الامتحان النهائي

تمرين 1.(8 نقط): لتكن μ_c دالة معرفة على $P(\mathrm{N})$, $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ كالتالي:

$$\mu_c(A)=\begin{cases} cardA, & A \text{ منتهية} \\ +\infty \ , & A \text{ غيرمنتهية} \end{cases}$$

برهن أن:

1. الأسرة $P(\mathrm{N})$ عشيرة على N.
2. الدالة μ_c قياس موجب، $\sigma-$جمعي و $\sigma-$منته على $P(\mathrm{N})$.
3. في فراغ القياس $(\mathrm{N},P(\mathrm{N}),\mu_c)$ هل التقارب تقريبا في كل مكان يكافئ التقارب النقطي؟ علل.

تمرين 2.(8 نقط): ليكن فراغ "لوبيغ" للقياس $(\Re,\mathrm{M}(\Re),\mu_1)$ و $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية دوال معرفة على المجال $[1,+\infty[$ كالتالي:

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\chi_{[k,k+1[}(x) \quad , \quad x\in[1,+\infty[\quad , \quad n\geq 1$$

حيث $\chi_{[k,k+1[}$ الدالة المميزة للمجال $[k,k+1[$, $k=1,2,...,n$.

1. من أجل كل x من المجال $[1,+\infty[$ برهن أن:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x) \quad / \quad f(x)=\frac{1}{[x]^2} \ , \ x\in[1,+\infty[$$

حيث $[x]$ الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.

2. برهن أن كل من $(f_n)_{n\geq 1}$ و f قابلة للقياس ومحدودة على المجال $[1,+\infty[$، ماذا تستنتج؟.
3. مستعملا نظرية "ليفي"، (التقارب الرتيب) أحسب التكامل التالي:

$$\int_{[1,+\infty[}\frac{1}{[x]^2}d\mu_1(x)$$

تمرين 3.(4 نقط): ليكن h_1 تطبيقا معرفا على فراغ "لوبيغ" $£_1(X,\mu)$ كالتالي:

$$h_1(f)=\int_X |f(x)|d\mu \quad , \quad f\in £_1(X,\mu)$$

هل التطبيق h_1 نظيم على الفراغ $£_1(X,\mu)$؟ علل.