جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية الرياضيات وعلوم المادة
شعبة علوم المادة

السنة أولى ليسانس
التاريخ:
المدة:

الامتحان الأول في الرياضيات 1

التمرين 1: 08

لتكن F مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ معرفة كمايلي:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 x = z - y\}$$

1. بين أن F غير خالية. 01
2. بين أن F فضاء شعاعي جزءي من $\mathbb{R}^3$. 01,5 01,5
3. عين المجموعة S المولدة ل F. 01,5
4. أحسب dim F. 01,5 + 01

التمرين 2: 12

لتكن f دالة عددية حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9 - x^2}{x - 3} & if\ x < 3 \\ -4x + 6 & if\ x > 3 \end{cases}$$

- أوجد D_f مجموعة تعريف الدالة f. 02
- ضع قيم النهايات عند أطراف مجموعة التعريف. 4
- هل تقبل f تمديد بالاستمرار عند 3، علل. 1
- بافتراض أن $\tilde{f}$ هو هذا التمديد، عينه. 2
- حل المعادلة $\tilde{f}(x) = 0$ في $\mathbb{R}$. 01
- أحسب الصورة المباشرة للمجموعة $]3,5[\cup]-2,3[$ بواسطة التطبيق f. 02

التمرين الأول

التصحيح الاختبار الأول رياضيات 1

① $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z-y\}$

1 - نبين أن $F\neq\phi$ نبحث عن عنصر من $\mathbb{R}^3$ ينتمي إلى F نأخذ ~~العنصر~~ الشعاع المعدوم لـ $\mathbb{R}^3$

وهو $(x,y,z)=(0,0,0)$

بالتعويض في المعادلة $x=z-y$ ① بمركبات ~~الشعاع~~ الشعاع المعدوم نجد أنها محققة أي $0=0-0$ ①

ومنه $(0,0,0)\in F$ وبالتالي $F\neq\phi$

يمكن أخذ أي $\mathbb{R}^3$ الآتية $(z-y,y,z)$ مع إعطاء أرقام له $(1,1,0)$ مثلا $\in F$

2 - نبين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

نبين أنه $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall u,v\in F\ \ \alpha u+\beta v\in F$

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و $u=(x,y,z),\ v=(x',y',z')\in F$

نبين أنه $\alpha u+\beta v\in F$ أي أن مركبات الشعاع $w=\alpha u+\beta v$ تحقق المعادلة ①

نبحث عن مركبات w

$$w=\alpha u+\beta v=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$$
$$=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x',\beta y',\beta z')$$
$$=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')$$

1

بالتعويض في المعادلة ① مع العلم أنه $u=(x,y,z)$ عنصر من F هذا يعني أنه $x=z-y$ و $v=(x',y',z')$ عنصر من F هذا يعني أن $x'=z'-y'$ ومنه بالتعويض في المعادلة ①

$$\alpha x+\beta x' = \alpha(z-y)+\beta(z'-y')$$
$$= \alpha z-\alpha y+\beta z'-\beta y'$$
$$= \alpha z+\beta z'-\alpha y-\beta y'$$
02
$$= \alpha z+\beta z'-(\alpha y+\beta y')$$

ومنه المعادلة ① محققة وبالتالي ~~الحد~~ الشعاع

$$\alpha U+\beta V \in F$$

ومنه F فضاء شعاعي جزئي من F

يمكن إستعمال الطريقة الثانية ~~وهي~~ ونبين فيها أنه

1- $\forall U, V \in F \quad U+V \in F$

2- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall U \in F \quad \alpha U \in F$

* ليكن $U, V \in F$ نبين أن $U+V \in F$ نبين أن مركبات الشعاع $U+V$ تحقق المعادلة ① نبحث عن مركبات $U+V$

$$U+V = (x, y, z)+(x', y', z')$$
0.5
$$= (x+x', y+y', z+z')$$

بالتعويض في ① نجد أنها محققة باعتبار أنه $x=z-y$ و $x'=z'-y'$ لأن U, V شعاعان من F

$$x+x' = z-y+z'-y'$$
$$= z+z'-y-y'$$
01
$$= z+z'-(y+y')$$

ومنه المعادلة محققة.

ت

نثبت ان الشرط الثاني محقق

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $u \in F$ حيث $u=(x,y,z)$

نبين انه $\alpha u \in F$ نبحث عن مركبات الشعاع αu

لدينا

$\alpha u = \alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

التعويض في المعادلة (1) بمركبات αu 0,5

باعتبار انه $x = z-y$ لانه $u \in F$

$\alpha x = \alpha(z-y)$

$= \alpha z - \alpha y$

ومنه المعادلة (1) محققة وبالتالي

1 $\alpha u \in F$

ومنه F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

تعيين المجموعة المولدة لـ F أي انه كل شعاع من F

هو تركيبة خطية من ~~هذه~~ أشعة المجموعة المولدة

ليكن $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in F \Leftrightarrow u = (z-y, y, z)$

0,5 $= (-y, y, 0) + (z, 0, z)$

0,5 $= y(-1,1,0) + z(1,0,1)$

نضع $u_1 = (-1,1,0)$ و $u_2 = (1,0,1)$ ومنه كل شعاع $u \in F$

يكتب بدلالة u_1, u_2 كما يلي :

0,5 $u = y u_1 + z u_2$

إذن $S=\{u_1, u_2\}$

* إذا كانت S اساس لـ F فإنه

$\dim F = \text{Card}(S)$

وبما أنه S مولدة يبقى أن نبرهن أنه S مستقلة خطيا

أي $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

0,5

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha(-1,1,0) + \beta(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (-\alpha+\beta, \alpha, \beta) = (0,0,0)$$

1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta = 0 \\ \wedge\ \alpha = 0 \\ \wedge\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \wedge \\ \beta = 0 \end{cases}$$

ومنه S مستقلة خطيا.

إذنه S اساس لـ F ومنه

$$\dim F = \text{Card}\, S = \text{Card}\{u_1, u_2\} = 2$$

0,1

تصحيح التمرين الثاني

لدينا $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-x^2}{x-3} & \text{لما } x < 3 \\ -4x+6 & \text{لما } x > 3 \end{cases}$

تعيين D_f

من أجل $x<3$ لدينا f اقتصار للدالة

$x \longmapsto \dfrac{9-x^2}{x-3}$ وهي دالة ناطقة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$

ومنه f معرفة على $]-\infty, 3[$ (1)

و لدينا من اجل $x>3$ f اقتصار للدالة

$x \longmapsto -4x+6$ وهي دالة كثير حدود وهي معرفة على $\mathbb{R}$

ومنه f معرفة على $]3, +\infty[$

وبالتالي f معرفة على $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ (1)

* حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

$$0{,}1 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-4x+6) = -\infty$$

$$0{,}1 \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{9-x^2}{x-3} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} \left(\frac{9-x^2}{x-3}\right) = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} \left(\frac{(3-x)(3}{(x-3)}\right.$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 3} \left(\frac{-\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}\right)$$

01

$$= -\lim_{x \overset{<}{\to} 3} (x+3 = -6$$

01 $\lim_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (-4x+6) = -6$

ومنه

$$\lim_{x \to 3} f(x) = -6$$

أي الدالة f تقبل نهاية عند 3 هي -6

لأن f تقبل نهاية عند 3 هي -6 فإن

01 تقبل الدالة f تمديدا بالاستمرار عند 3

هو $\tilde{f}$ ~~حيث~~ معرف كما يلي :

o2 $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{9-x^2}{x-3} & \text{لما } x < 3 \\ -6 & \text{لما } x = 3 \\ -4x+6 & \text{لما } x > 3 \end{cases}$$

حل المعادلة $\tilde{f}(x) = 0$

من أجل $x < 3$ لدينا

$$\tilde{f}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{\cdot} = 0 \Leftrightarrow$$

$\tilde{f}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x^2=0 \\ \wedge \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(3+x)=0 \\ \wedge \\ x \neq 3 \end{cases}$

0.75 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \vee x=-3 \\ \wedge \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x=-$

ومنه الحل مقبول لأنه من المجال $]-\infty, 3[$

من أجل $x > 3$ لدينا

$\check{f}(x)=0 \Leftrightarrow -4x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

بما أن $\frac{3}{2} \notin]3,+\infty[$ فإن الحل مرفوض 0.75

مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$ هي

$S = \{-3\}$

من أجل $x=3$ المعادلة $f(x)=-6$ غير محققة)

لتعيين الصورة المباشرة للمجموعة

$]-2,3[\cup]3,5[$

لدينا

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(]-2,3[\cup]3,5[)$ (ب) ومن

$= f(]-2,3[) \cup f(]3,5[)$.

حساب

d) $f(-2,3[) =$

لدينا الدالة f هي اقتصار للدالة $g: x \mapsto \frac{9-x^2}{x-3}$ على $]-\infty,3[$ ومنه

$g(x) = -x-3$

وبما أن الدالة g متناقصة على المجموعة $]-2,3[$ فإن

~~$g(]-2,3[)$~~

$g(]-2,3[) =]g(3), g(-2)[$
$=]-6,-1[$

إذن $g(]-2,3[) = f(]-2,3[) =]-6,-1[$

حساب $f(]3,5[)$

لدينا الدالة f هي اقتصار للدالة $h: x \mapsto -4x+6$ على المجال $]3,+\infty[$ والدالة h متناقصة تماما على المجال $]3,5[$ ومنه

01

$h(]3,5[) =]h(5), h(3)[$
$=]-14,-6[= f(]2,5[)$ ومنه

$f(]-2,3[\cup]3,5[) =]-6,-1[\cup]-14,-6[$
$=]-14,-6[\cup]-6,-1[$