Examen final — Analyse 3 — 06-01-2025

Corrigé type.

Exercice 1 :

1. (a) $$\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-(n+1)} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{e^{-n} n!} = e^{-1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$ ①

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{e^2} < 1$, alors la série $\sum_n U_n$ est convergente.

(b) $V_n = \frac{1}{n+1} + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n}$ diverge car $\frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n}$.
- La série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ converge par le critère de Leibniz car

$(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n} = (-1)^n a_n \;/\; a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ avec ②

$a_n > 0, \forall n \geq 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = 0$$ et

$(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante (pour $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, on a $f'(x) = \frac{-(x-1)}{2\sqrt{x}(1+x)^2} < 0$).

Alors, $\sum_{n\geq 1} V_n$ est la somme d'une série divergente et d'une série convergente, alors elle est divergente.

(c) $|W_n| = \left| \dfrac{\cos(n^2)}{n^{3/2}} \right| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ 1

La série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann $\alpha = 3/2$)

par comparaison, la série $\sum\limits_{n \geq 1} W_n$ est absolument convergente donc elle est convergente.

2° (a) $S_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 2

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 0,5

0,5

La série $\sum\limits_{n \geq 2} T_n$ est donc convergente et a pour somme $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 2:

1. * Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$
   * si $x > 0$, on a $f_n(x) = 0$, pour n assez grand

1,5

par suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2. $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt)\,dt = \int_0^1 u(1-u)\,du = 1/6$ 2

(En posant $u = nt$). donc il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque

$\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt \not\longrightarrow \int_0^1 0\,dt$ 1

3. Pour n assez grand, On a : 1,5

$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x)| = 0$, donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, 1]$.

Exercice 3 :

1°) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \right| = 1$, donc $\boxed{R=1}$ 1

2°) Si $|x|<R$, alors la série converge 0,5

si $|x|=R$, alors soit $x=1$ ou $x=-1$

0,25 Pour $x=1$, la série $\sum \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$ diverge car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = 1 \neq 0$$

0,25 Pour $x=-1$, la série $\sum \frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)}$ car $\lim \frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)} \neq 0$

donc le domaine de convergence est $D =]-1, 1[$ 0,5

3°) On a : $\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = 1 - \frac{1}{n-1} + \frac{4}{n-2}$ donc

$$f(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2}$$

$$= \frac{x^3}{1-x} - x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + 4x^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2}$$ 3

$$= \frac{x^3}{1-x} - x\left[-\ln(1-x) - x\right] + 4x^2\left[-\ln(1-x)\right]$$

$$= \frac{x^2}{1-x} + x(1-4x)\ln(1-x).$$

4°) pour $x \in D$: $f'(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)} x^{n-1}$! 0,5

D'autre part :

0,5 $$f'(x) = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} + (1-8x)\ln(1-x) - \frac{x(4-x)}{1-x}$$

En remplaçant, x par $\frac{1}{2}$, on trouve,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{13}{2} + 3\ln 2$$ 0,25

Ainsi

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 2^{-n}}{(n-1)(n-2)} = \frac{13}{4} + \frac{3}{2}\ln 2$$ 0,25

Université Khasdi Merbah 2024-2025 Département de Mathématiques

Lundi $06 - 01 - 2025$ 10h :30 mn—12h

Examen final S3

Exercice 1 : (7 points)

1. Étudier les natures des séries numériques de termes généraux :

1 2 1

$$(a) \quad U_n = \frac{n!e^{-n}}{n^n}, \quad (b) \quad V_n = \frac{1 + (-1)^n\sqrt{n}}{n+1}, \quad (c) \quad W_n = \frac{\cos(n^2)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Considérons la série de terme général :

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

(a) On pose $S_n = T_2 + T_3 + ... + T_n$. Calculer S_n. 2

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} T_n$. 1

Exercice 2 : (6 points)

Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de fonctions définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2x(1-nx), & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n). 1,5
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n)? 2 1
3. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, 1]$ avec $a > 0$. 1,5

Exercice 3 : (7 points)

Soit la série entière suivante :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n.$$

1 1. Déterminer le rayon de convergence R.

1,5 2. En déduire le domaine de convergence.

3 3. Calculer sa somme $S(x)$.

1,5 4. En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 2^{-n}}{(n-1)(n-2)}$.